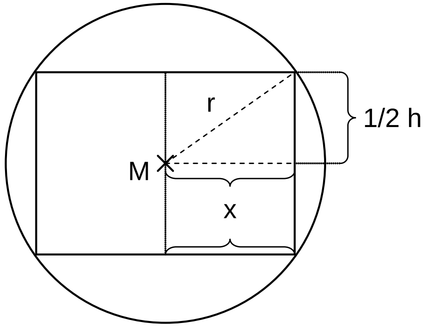
S. 62 / 8 b) Zylinder in Kugel

Einer Kugel vom Radius r soll ein Zylinder (Radius x; Höhe h) einbeschrieben werden.

Für welche Werte von x und h ist das Zylindervolumen maximal?
Wieviel Prozent des Kugelvolumens ist es?

Schnitt-Ebene durch die Zylinder-Achse:



Volumen des Zylinders: $V(x;\, h) = x^2 \pi h$

Elimination des Zylinder-Radius x:

Pythagoras:

$r^2 = x^2 + (1/2\, h)^2$
$\rightarrow\ x^2 = r^2 - 1/4\, h^2$ einsetzten in $V(x;\, h)$:

$V(h) = (r^2 - 1/4\, h^2)\, \pi h = -\,1/4\, \pi h^3 + r^2 \pi h$

$V'(h) = -\,3/4\, \pi h^2 + r^2 \pi \overset{!}{=} 0$ [Auflösen nach der Var. h]

$3/4\, \pi h^2 = r^2 \pi$; $h^2 = 4/3\, r^2$; $\mathbf{h = 2/3\sqrt{3}\, r}$

$h^2 = \ldots$ einsetzen in $x^2 = \ldots$:

$x^2 = r^2 - 1/4 \cdot 4/3\, r^2 = 2/3\, r^2$; $\mathbf{x = 1/3\sqrt{6}\, r}$

Maximales Zylinder-Volumen:

$V_{max} = (1/3\sqrt{6}\, r)^2\, \pi \cdot 2/3\sqrt{3}\, r = 4/9\sqrt{3}\, \pi r^3$

Prozentualer Anteil p am Kugelvolumen:

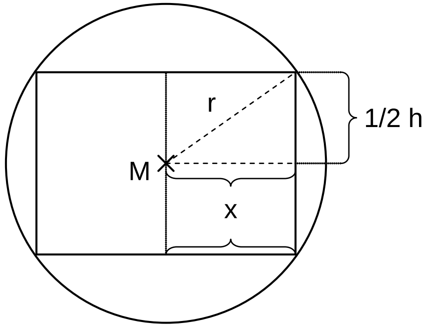
$$p = \frac{V_{max}}{V_{Kugel}} = \frac{4/9\sqrt{3}\,\pi r^3}{4/3\,\pi r^3} = 0{,}5773\ldots \approx 57{,}7\ \%$$

S. 62 / 8 b) Zylinder in Kugel

Einer Kugel vom Radius r soll ein Zylinder (Radius x; Höhe h) einbeschrieben werden.

Für welche Werte von x und h ist das Zylindervolumen maximal?
Wieviel Prozent des Kugelvolumens ist es?

Schnitt-Ebene durch die Zylinder-Achse:



Volumen des Zylinders: $V(x;\, h) = x^2 \pi h$

Elimination des Zylinder-Radius x:

Pythagoras:

$r^2 = x^2 + (1/2\, h)^2$
$\rightarrow\ x^2 = r^2 - 1/4\, h^2$ einsetzten in $V(x;\, h)$:

$V(h) = (r^2 - 1/4\, h^2)\, \pi h = -\,1/4\, \pi h^3 + r^2 \pi h$

$V'(h) = -\,3/4\, \pi h^2 + r^2 \pi \overset{!}{=} 0$ [Auflösen nach der Var. h]

$3/4\, \pi h^2 = r^2 \pi$; $h^2 = 4/3\, r^2$; $\mathbf{h = 2/3\sqrt{3}\, r}$

$h^2 = \ldots$ einsetzen in $x^2 = \ldots$:

$x^2 = r^2 - 1/4 \cdot 4/3\, r^2 = 2/3\, r^2$; $\mathbf{x = 1/3\sqrt{6}\, r}$

Maximales Zylinder-Volumen:

$V_{max} = (1/3\sqrt{6}\, r)^2\, \pi \cdot 2/3\sqrt{3}\, r = 4/9\sqrt{3}\, \pi r^3$

Prozentualer Anteil p am Kugelvolumen:

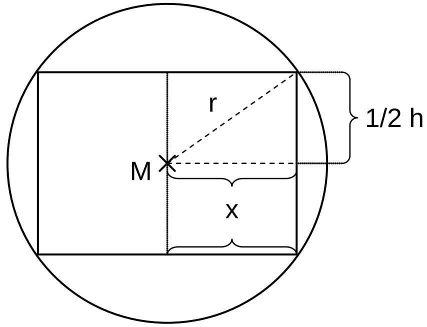
$$p = \frac{V_{max}}{V_{Kugel}} = \frac{4/9\sqrt{3}\,\pi r^3}{4/3\,\pi r^3} = 0{,}5773\ldots \approx 57{,}7\ \%$$

S. 62 / 8 b) Zylinder in Kugel

Einer Kugel vom Radius r soll ein Zylinder (Radius x; Höhe h) einbeschrieben werden.

Für welche Werte von x und h ist das Zylindervolumen maximal?
Wieviel Prozent des Kugelvolumens ist es?

Schnitt-Ebene durch die Zylinder-Achse:



Volumen des Zylinders: $V(x;\, h) = x^2 \pi h$

Elimination des Zylinder-Radius x:

Pythagoras:

$r^2 = x^2 + (1/2\, h)^2$
$\rightarrow\ x^2 = r^2 - 1/4\, h^2$ einsetzten in $V(x;\, h)$:

$V(h) = (r^2 - 1/4\, h^2)\, \pi h = -\,1/4\, \pi h^3 + r^2 \pi h$

$V'(h) = -\,3/4\, \pi h^2 + r^2 \pi \overset{!}{=} 0$ [Auflösen nach der Var. h]

$3/4\, \pi h^2 = r^2 \pi$; $h^2 = 4/3\, r^2$; $\mathbf{h = 2/3\sqrt{3}\, r}$

$h^2 = \ldots$ einsetzen in $x^2 = \ldots$:

$x^2 = r^2 - 1/4 \cdot 4/3\, r^2 = 2/3\, r^2$; $\mathbf{x = 1/3\sqrt{6}\, r}$

Maximales Zylinder-Volumen:

$V_{max} = (1/3\sqrt{6}\, r)^2\, \pi \cdot 2/3\sqrt{3}\, r = 4/9\sqrt{3}\, \pi r^3$

Prozentualer Anteil p am Kugelvolumen:

$$p = \frac{V_{max}}{V_{Kugel}} = \frac{4/9\sqrt{3}\,\pi r^3}{4/3\,\pi r^3} = 0{,}5773\ldots \approx 57{,}7\ \%$$